Auszug aus der Abhandlung: „Allgemeine Transformation der bestimmten Doppelintegrale“.

Von Dr. Anton Winckler.

(Vorgelegt von Herrn Prof. Dr. Petzval in der Sitzung vom 7. Jänner 1859.)

Die meisten Fragen, auf welche die Betrachtung doppelter Integrale mit veränderlichen Grenzen führt, reduciren sich zuletzt auf die Frage nach der Transformation jener Integrale mittelst zweier gleichzeitig eingeführten neuen Veränderlichen. Obgleich nun Euler, indem er in der Abhandlung: *De formulis integralibus duplicatis* vom Jahre 1759 die Transformation der Differentialformel

$$f(x, y)\, dx\, dy$$

fand, einen Theil der Aufgabe löste, so blieb doch der andere ungleich schwierigere Theil, welcher die vollständige Bestimmung der aus jener Transformation entspringenden Doppelintegrale — sowohl in Bezug ihrer Anzahl als der Grenzen — betrifft, bis jetzt unbeantwortet.

Die vorliegende Abhandlung enthält die Lösung dieser Aufgabe in der folgenden Fassung.

1.

In dem doppelten Integrale:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi'(x)} f(x, y)\, dy$$

seien $\varphi^0(x)$ und $\varphi'(x)$ zwei Functionen, welche zwischen den Werthen ξ_0 und ξ_1 von x endlich und stetig bleiben, aber nicht einander gleich werden; das Integral soll durch zwei neue Veränderliche λ, μ, welche mit den ursprünglichen x, y in den gegebenen Beziehungen:

$$x = X_{(\lambda,\mu)} \quad , \quad y = Y_{(\lambda,\mu)}$$

stehen, transformirt werden, wobei aber die beiden Functionen $X_{(\lambda,\mu)}$, $Y_{(\lambda,\mu)}$ nur durch die allgemeinen Bedingungen charakterisirt sind, dass die Werthe

$$\mu_0 \quad , \quad \mu_1 \quad , \quad \mu^0 \quad , \quad \mu'$$

welche sich für μ resp. aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} X_{(\lambda,\mu)} &= \xi_0 \qquad , \quad X_{(\lambda,\mu)} = \xi_1 \\ Y_{(\lambda,\mu)} &= \varphi^0(X_{(\lambda,\mu)}) \quad , \quad Y_{(\lambda,\mu)} = \varphi'\,(X_{(\lambda,\mu)}) \end{aligned}$$

ergeben, vollkommen bestimmt und einwerthig bleiben, so lange λ zwischen dem grössten und kleinsten der Werthe

$$\lambda_0^0 \quad , \quad \lambda_0^1 \quad , \quad \lambda_1^0 \quad , \quad \lambda_1^1$$

liegt, welche als die einzigen reellen Wurzeln resp. der Gleichungen

$$\mu_0 = \mu^0 \quad , \quad \mu_0 = \mu' \quad , \quad \mu_1 = \mu^0 \quad , \quad \mu_1 = \mu'$$

erhalten werden.

Wenn in dieser Allgemeinheit eine Lösung der Aufgabe erwartet werden konnte, so musste ein Gesichtspunkt der Betrachtung gesucht werden, von welchem aus sich alle möglichen Fälle, welche bezüglich des Wachsens oder Abnehmens der Functionen μ_0, μ_1, μ^0, μ' mit ihrer wachsenden Veränderlichen λ eintreten können, in unmittelbarer Verbindung mit den Fällen, welche hinsichtlich der Grössenverhältnisse der Werthe λ_0^0, λ_0^1, λ_1^0, λ_1^1 möglich sind, sowie endlich in genauester Verbindung mit dem entsprechenden Zeichen der Determinante:

$$\varDelta = \frac{dX}{d\mu} \cdot \frac{dY}{d\lambda} - \frac{dX}{d\lambda} \cdot \frac{dY}{d\mu}$$

erkennen und auf alle Arten unter sich verbinden lassen, welche zur Lösung der Aufgabe überhaupt zulässig sind.

Für eine Erörterung dieser Art lag nun aber kein Beispiel vor; denn es ist klar, dass aus den Verfahrungsarten, womit in bekannten sehr speciellen Fällen und zumeist unter Zuhilfenahme geometrischer Vorstellungen, das transformirte Doppelintegral hergestellt wurde, der soeben etwas näher bezeichnete, rein analytische Gang der Entwickelung sich unmöglich abstrahiren lässt. Der Weg der geometrischen Darstellung, welcher in der vorliegenden Materie allenthalben geläufig ist, und welcher in besonderen Fällen zur Deutlichkeit ohne

Zweifel sehr Vieles beiträgt, würde, bei der hier angestrebten Allgemeinheit, und wo es sich um die gleichzeitige Erledigung aller irgend denkbaren Fälle handelt, noch grössere Weitläufigkeiten verursacht haben, weil, um alle möglichen Fälle mittelst geometrischer Betrachtungen erörtern zu können, vor Allem die erschöpfende Kenntniss dieser Fälle selbst nöthig ist, die man sich wohl nur wieder durch analytische Auseinandersetzungen verschaffen kann.

Das Ergebniss dieser Untersuchung, welche hier nicht ausführlicher beschrieben werden kann, ist nun aber sehr merkwürdig, indem die Analyse aller möglichen Fälle zeigt, dass das oben angegebene Doppelintegral, in bezeichneter Weise durch zwei gleichzeitig eintretende neue Veränderliche transformirt, immer in d r e i neue Doppelintegrale zerfällt, und dass sich die Grenzen dieser Integrale in vollständig bestimmter Weise angeben lassen, ohne dass irgend ein Zweifel über das der Determinante $\triangle$ beizulegende Zeichen übrig bliebe. — Mit Rücksicht auf die bereits angeführten Bezeichnungen und Voraussetzungen wird nämlich bewiesen, dass stets:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y)\, dy =$$

$$\int_{\lambda_1^0}^{\lambda_1^1} d\lambda \int_{\mu_0}^{\mu_1} f(X, Y)\, \Delta d\mu + \int_{\lambda_1^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^0}^{\mu^1} f(X, Y)\, \Delta d\mu + \int_{\lambda_0^1}^{\lambda_0^0} d\lambda \int_{\mu^1}^{\mu_0} f(X, Y)\, \Delta d\mu.$$

Es ist für sich klar, dass man, ohne die Anzahl der Integrale auf der rechten Seite der Gleichung zu vergrössern, durch Zerlegung derselben andere Verbindungen der Grenzwerthe unter sich, und hierdurch andere Formen erlangen kann; zwölf derselben finden sich in der Abhandlung angegeben. Der Beweis der obigen Formel, welche die Lösung der ursprünglichen Aufgabe darstellt und wesentlich neu ist, erscheint nun allerdings in etwas weitläufiger Form; aber jener Beweis bildet den bei weitem schwierigsten Theil der Arbeit und es wurde wohl nichts versäumt, denselben in die möglichst kurze Form zu bringen, so dass weitere Kürzungen unbeschadet der Gründlichkeit, sich kaum daran anbringen lassen werden.

Zahlreiche Anwendungen des so eben bezeichneten Theorems auf speciellere Formen des Doppelintegrals liefern eben so viele bemerkenswerthe neue Resultate und bilden die zweite stärkere Hälfte der Abhandlung.

Einige dieser Resultate mögen hier etwas näher bezeichnet werden.

2.

Wie bekannt darf die Aufeinanderfolge der Integrationen bei Doppelintegralen zwischen constanten Grenzen umgekehrt werden, ohne dass der Differential-Ausdruck hierdurch irgend eine Veränderung erleidet. In der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt, dass diese Umkehrung in gleicher Weise auch bei veränderlichen Grenzen geschehen kann; nur entstehen daraus im Allgemeinen drei neue Doppelintegrale zwischen Grenzen, welche aus den ursprünglich gegebenen in vorgeschriebener Weise zu bilden sind. Der entsprechende Satz lässt sich in folgender Weise ausdrücken:

Vorausgesetzt, es liege zwischen ξ_0 und ξ_1 kein Werth von x, welcher der Gleichung $\varphi^0(x) = \varphi^1(x)$ Genüge leistet, und angenommen, man habe aus den beiden Gleichungen

$$y = \varphi^0(x) \text{ und } y = \varphi'(x)$$

die einzigen reellen Wurzeln resp.

$$x = \psi^0(y) \text{ und } x = \psi'(y)$$

abgeleitet, so findet die Gleichung Statt:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi'(x)} f(x, y)\, dy =$$

$$\int_{\varphi^0(\xi_1)}^{\varphi'(\xi_1)} dy \int_{\psi^0(y)}^{\xi_1} f(x, y)\, dx + \int_{\varphi'(\xi_0)}^{\varphi^0(\xi_0)} dy \int_{\psi'(y)}^{\xi_0} f(x, y)\, dx + \int_{\varphi'(\xi_1)}^{\varphi^0(\xi_0)} dy \int_{\psi^0(y)}^{\psi'(y)} f(x, y)\, dx.$$

Diese Gleichung lässt selbst wieder viele Anwendungen zu. Um nur einer derselben zu erwähnen, hat man:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{x} F\left(\frac{\xi - x}{x - y}\right) \frac{f(y)\, dy}{\xi - y} = \int_0^{\xi} f(y)\, dy \int_0^{\infty} \frac{F(z)\, dz}{(1+z)^2}$$

und daraus wieder:

$$\int_0^{\xi} dx \int_0^{x} \frac{(\xi - x)^{m-1} (x - y)^{n-1}}{(\xi - y)^{m+n-1}} f(y)\, dy = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_0^{\xi} f(y)\, dy$$

Die letztere Gleichung lässt sich unmittelbar zur Lösung zweier Aufgaben benützen, welche in specieller Form in der Mechanik ihre Anwendung finden, nämlich:

1. In der Gleichung:

$$\int_0^\xi \frac{(x-y)^{n-1}}{(\xi-y)^{m+n-1}} f(y)\,dy = F(x,\xi)$$

ist $F(x,\xi)$ eine gegebene Function: man verlangt die entsprechende Function $f(y)$. Es wird gezeigt, dass:

$$f(\xi) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \left\{ m\xi^{m-1} F(\xi t,\xi) + \xi^m \frac{d.F(\xi t,\xi)}{d\xi} \right\} dt.$$

2. In der Gleichung:

$$\int_0^x \frac{(x-y)^{n-1}}{(\xi-y)^{m+n-1}}\, d.f(y) = \Phi(x)$$

ist $\Phi(x)$ eine gegebene Function, es wird $f(y)$ gesucht.

Die Abhandlung weist nach, dass:

$$f(\xi) - f(o) = \frac{\Gamma_{(m+n)}}{\Gamma_{(m)}\Gamma_{(n)}} \int_0^\xi (\xi-x)^{m-1}\,\Phi(x)\,dx.$$

Bezeichnet $\varphi(x)$ eine Function von der Beschaffenheit, dass $\varphi(o) = 0$ wird, so findet die Gleichung Statt:

$$\int_0^\xi dx \int_0^{\varphi(x)} F\left(\frac{\psi(y)-x}{\psi(y)-\xi}\right) \frac{f(y)\,dy}{\xi-\psi(y)} = \int_0^{\varphi(\xi)} f(y)\,dy \int_0^1 F(z)\,dz,$$

aus welcher sich viele interessante Einzelnheiten ableiten lassen u. s. w.

3.

Hatte die vorhin bemerkte Transformation blos eine Veränderung der Grenzen, nicht aber des Differential-Ausdruckes zur Folge, so verhält sich dies anders, wenn die Veränderliche y als Function einer neuen z und von x betrachtet, und wenn x zur ersten, statt wie dies ursprünglich geschieht, zur letzten Integrationsveränderlichen gemacht wird. Es sei:

$$y = Y(z, x)$$

und es seien $\psi^0(z)$, $\psi^1(z)$ die Werthe von x, welche resp. aus den Gleichungen:

$$Y(z, x) = \varphi^0(x) \quad , \quad Y(z, x) = \varphi^1(x)$$

sich ergeben: endlich mögen

$$\theta^0(\xi_0) \quad , \quad \theta^0(\xi_1) \quad , \quad \theta^1(\xi_0) \quad , \quad \theta^1(\xi_1)$$

die einzigen reellen Werthe von z bezeichnen, welche resp. aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} Y(z, \xi_0) &= \varphi^0(\xi_0) \quad , \quad Y(z, \xi_1) = \varphi^0(\xi_1) \\ Y(z, \xi_0) &= \varphi^1(\xi_0) \quad , \quad Y(z, \xi_1) = \varphi^1(\xi_1) \end{aligned}$$

sich ableiten lassen, so findet die Gleichung Statt:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} dx \int_{\varphi^0(x)}^{\varphi^1(x)} f(x, y)\, dy =$$

$$\int_{\theta^1(\xi_1)}^{\theta^0(\xi_1)} dz \int_{\xi_1}^{\psi^0(z)} f(x, Y) \frac{dY}{dz}\, dx + \int_{\theta^1(\xi_1)}^{\theta^0(\xi_0)} dz \int_{\psi^0(z)}^{\psi^1(z)} f(x, Y) \frac{dY}{dz}\, dx + \int_{\theta^0(\xi_0)}^{\theta^1(\xi_0)} dz \int_{\xi_0}^{\psi^1(z)} f(x, Y) \frac{dY}{dz}\, dz$$

Dieses Resultat ist vorzugsweise wichtig, wenn es sich darum handelt, ein doppeltes Integral von der hier vorliegenden Form, worin die Function $f(x, y)$ nur bezüglich der Art und Weise, wie x und y mit einander verbunden vorkommen, nicht aber ihrer sonstigen Form nach gegeben ist, auf einfache bestimmte Integrale zu reduciren.

Von den zahlreichen Anwendungen, welche sich in diesem Sinne von jenem Resultate machen lassen, möge hier nur der folgenden Erwähnung geschehen.

Wenn das Doppelintegral alle diejenigen positiven Werthe von x und y umfassen soll, welche der Bedingung

$$o < \alpha x^{\frac{1}{m}} + \beta y^{\frac{1}{n}} < \varkappa$$

Genüge leisten, so findet die Gleichung Statt:

$$\iint f\left(\frac{ax^{\frac{1}{m}}+by^{\frac{1}{n}}-k}{\alpha x^{\frac{1}{m}}+\beta y^{\frac{1}{n}}-\varkappa}\right)dx\,dy =$$

$$\frac{mn}{m+n}\,\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\int_{\frac{k}{\varkappa}}^{\infty}\frac{(\varkappa z-k)^{m+n-1}}{(\alpha z-a)^{m}(\beta z-b)^{n}}\left\{m\,\frac{\alpha k-a\varkappa}{\alpha z-a}+n\,\frac{\beta k-b\varkappa}{\beta z-b}\right\}dz.$$

Ferner wird die folgende, sehr bemerkenswerthe Relation begründet:

$$mn\,a^{\frac{1}{m}}\,b^{\frac{1}{n}}\int_0^{\xi}dx\int_0^{\eta}f(ax^m-by^n)\,dy=\frac{\Gamma(\frac{1}{m})\Gamma(\frac{1}{n})}{\sin\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n}\right).\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\times\left\{\sin\frac{\pi}{m}\int_0^{b\eta^n}z^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}f(z)\,dz+\sin\frac{\pi}{n}\int_0^{a\xi^m}z^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}f(-z)\,dz\right\}$$

$$+\int_{a\xi^m}^{a\xi^m-b\eta^n}z^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}f(z)\,dz\int_0^{\frac{z}{a\xi^m}}(1-t)^{\frac{1}{n}-1}t^{-\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}dt$$

$$+\int_{b\eta^n}^{b\eta^n-a\xi^m}z^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}f(-z)\,dz\int_0^{\frac{z}{b\eta^n}}(1-t)^{\frac{1}{m}-1}t^{-\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}dt,$$

woraus man für $\xi=\infty$ und $\eta=\infty$ ein schon bekanntes Resultat als speciellen Fall ableiten kann.

4.

Die Anwendung des allgemeinen Theorems für die gleichzeitige Einführung zweier neuen Veränderlichen bietet nun allerdings ein sehr weites, noch fast gar nicht benütztes Feld zur Gewinnung interessanter Ergebnisse und Lösung mancher die Integralrechnung betreffenden Frage, indem man dadurch in den Stand gesetzt ist, die Darstellung des Doppelintegrals auch dann noch zu finden, wenn die Function unter dem Integralzeichen nicht blos von einem einzigen, sondern von zwei getrennten sogenannten Argumenten abhängt und diese letzteren in gewisser Weise durch neue Veränderliche ersetzt werden sollen. In der vorliegenden Abhandlung werden auf diesem Wege viele sehr allgemeine und durchaus neue Resultate gewonnen. Einige speciellere Ergebnisse dieser Art mögen Platz finden.

Die Gleichung:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(ax+by,\ \alpha x+\beta y)\, dy = \frac{1}{\alpha b - a\beta} \int_0^\infty d\lambda \int_{\frac{\beta}{b}\lambda}^{\frac{\alpha}{a}\lambda} f(\lambda, \mu)\, d\mu,$$

welche ihre Begründung findet, liefert als besondere Fälle die folgenden Werthbestimmungen:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-\left\{\frac{h}{ax+by}+\frac{ax+by}{k}\right\}(\alpha x+\beta y)}\, dy = \frac{k}{2(\alpha b - a\beta)} \left\{ li\left(e^{-\frac{\alpha}{a}h}\right) - li\left(e^{-\frac{\beta}{b}h}\right) \right\}$$

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{(ax+by)^{r-1}(\alpha x+\beta y)^{s-1}}{(1+ax+by)^n}\, dy = \frac{1}{sa^s \cdot b^s} \frac{(\alpha b)^s - (a\beta)^s}{\alpha b - a\beta} \cdot \frac{\Gamma(r+s)\Gamma(n-r-s)}{\Gamma(n)}$$

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty (ax+by)^{n-1} e^{-k(\alpha x+\beta y)}\, dy = \frac{\Gamma(n)}{k^{n+1}\alpha^n \beta^n} \cdot \frac{(\alpha b)^n - (a\beta)^n}{\alpha b - a\beta}$$

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty \frac{\sin(ax+by)}{ax+by} e^{-(\alpha x+\beta y)}\, dy = \frac{1}{\alpha b - a\beta} \cdot arctang \frac{\alpha b - a\beta}{\alpha\beta + ab}.$$

5.

Von besonderem Interesse ist die nähere Untersuchung des Doppelintegrals, welches auf den Ausdruck:

$$x^{m-1} y^{n-1} f(ax+by,\ xy)\, dx, dy$$

sich bezieht, und welches die Grundform einer grossen Anzahl häufig vorkommender Integrale darstellt.

So wird z. B. gezeigt, dass:

$$a^m b^n . \int_0^\infty dx \int_0^\infty x^{m-1} y^{n-1} f(ax + by . xy)\, dy =$$

$$\int^\infty \lambda^{m+n-1} d\lambda \int_0^1 (1+\sqrt{1-\mu})^{m-1} (1-\sqrt{1-\mu})^{n-1} \frac{f(2\lambda, \frac{\lambda^2}{ab}\mu)}{\sqrt{1-\mu}} d\mu$$

$$+ \int_0^\infty \lambda^{m+n-1} d\lambda \int_0^1 (1-\sqrt{1-\mu})^{m-1} (1+\sqrt{1-\mu})^{n-1} \frac{f(2\lambda, \frac{\lambda^2}{ab}\mu)}{\sqrt{1-\mu}} d\mu,$$

woraus sich für $m=n=1$ ergibt:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(ax + by, xy)\, dy = \frac{.2}{ab} \int_0^\infty \lambda d\lambda \int_0^1 \frac{f(2\lambda, \frac{\lambda^2}{ab}\mu)}{\sqrt{1-\mu}} d\mu.$$

Diese Gleichung wird zur Werthbestimmung einer Anzahl doppelter Integrale benützt, wovon einige bereits von Cauchy in den Noten zur „*Théorie des ondes*“ untersucht und unter Anwendung unendlicher Reihen auch näher bestimmt worden sind.

Nebenbei werden zwei Reductionsformeln für bestimmte Integrale erhalten, welche über die Unmöglichkeit, diese Integrale in endlicher Form zu finden, wohl den besten Aufschluss geben.

Diese Formeln lassen sich wie folgt darstellen.

$$\int_0^\alpha \log \frac{1 + \sin\beta \cos x}{1 - \sin\beta \cos x} dx = 2 \int_0^\beta \frac{\operatorname{arctg} (\sin\alpha \operatorname{tang} x)}{\sin x} dx$$

$$\int_0^\alpha \log \frac{\cos\beta + \cos x}{\cos\beta - \cos x} dx = - \int_0^\alpha \log \left(\operatorname{tang} \frac{x}{2}\right)^2 dx + \int_0^\beta \log \frac{\sin(\alpha + x)}{\sin(\alpha - x)} dx,$$

wobei die letztere Gleichung nur so lange gilt, als $\cos\beta - \cos\alpha$ positiv ist.

6.

Unter den weiteren, mehr oder weniger allgemeinen Transformations-Formeln, welche sich aus der gleichzeitigen Einführung zweier neuen Integrations-Veränderlichen ergeben mögen die folgenden hervorgehoben werden. Es ist:

$$\int_0^\xi dx \int_0^\eta f(x,y)\,dy =$$

$$\int_{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}^{\xi} \lambda d\lambda \int_0^{\arccos\frac{\xi}{\lambda}} f(\lambda\cos\theta, \lambda\sin\theta)\,d\theta + \int_{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}^{\eta} \lambda d\lambda \int_0^{\arccos\frac{\eta}{\lambda}} f(\lambda\sin\theta, \lambda\cos\theta)\,d\theta$$

$$+ \int_0^{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \lambda\, d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\lambda\cos\theta, \lambda\sin\theta)\,d\theta$$

woraus, wie leicht zu ersehen ist, folgt:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(x,y)\,dy = \int_0^\infty \lambda d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\lambda\cos\theta, \lambda\sin\theta)\,d\theta.$$

Aus dieser Gleichung wird z. B., wenn man

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\, x^{2m-1}\, y^{2n-1}$$

setzt, unmittelbar die bekannte Formel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1}\theta \sin^{2n-1}\theta d\theta = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

gefunden. Aus der letztern selbst folgt, wenn $\cos\theta = \sqrt{x}$ gesetzt wird,

$$\int_0^1 x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

u. dgl. m.

Sind die Grenzen x und y des Doppelintegrals durch die Bedingung:

$$o < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

gegeben und soll sich die Integration nur auf die positiven Werthe der Veränderlichen erstrecken, welche jener Bedingung genügen, so findet die Gleichung Statt:

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \frac{ab}{4} \int_0^1 d\lambda \int_0^1 \frac{f(a\sqrt{\lambda\mu},\, b\sqrt{\lambda(1-\mu)})}{\sqrt{\mu(1-\mu)}}\, d\mu$$

$$= ab \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(a\rho \cos\theta,\, b\rho \sin\theta)\, d\theta.$$

Soll sich die Integration auf alle positiven Werthe von x und y ausdehnen, welche der Bedingung $0 < x^2 + y^2 < 1$ Genüge thun, so ist:

$$\iint \frac{f(x^2 - 2xy\cos\gamma + y^2)}{\sqrt{1-x^2}\,.\,\sqrt{1-y^2}}\, dx\, dy =$$

$$2\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\frac{1}{\sqrt{2}}} d\lambda \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{+\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{f\left\{\sin^2\gamma - 4\left(\lambda^2 - \cos^2\frac{\gamma}{2}\right)\left(\mu^2 - \sin^2\frac{\gamma}{2}\right)\right\}}{\sqrt{1-\lambda^2}\,.\,\sqrt{1-\mu^2}}\, d\mu.$$

7.

In der vorliegenden Abhandlung treten nun aber noch einige wesentlich allgemeinere Resultate als besondere Fälle des zu Grunde liegenden Theorems der Transformation hervor, welche hier bemerkt werden mögen. Setzt man nämlich zur Abkürzung:

$$X = \left(\frac{(\lambda - a)(\mu - a)}{b - a}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad Y = \left(\frac{(\lambda - b)(\mu - b)}{a - b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

und setzt man voraus, es sei $\alpha > \beta > a > b$; nimmt man ferner an, die Integration solle sich über alle positiven, der Bedingung:

$$o < \frac{x^m}{\alpha - a} + \frac{y^n}{\beta - b} < 1$$

entsprechenden Werthe von x und y erstrecken, so ist:

$$mn\,(a-b)^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1}\iint f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int\limits_a^\beta d\lambda \int\limits_a^b \frac{(\mu-\lambda)\,f(X,Y)\,d\mu}{[(\lambda-a)(a-\mu)]^{1-\frac{1}{m}}\,[(\lambda-b)(\mu-b)]^{1-\frac{1}{n}}}$$

$$+\int\limits_\beta^\alpha d\lambda \int\limits_{a+\frac{(\alpha-a)(a-b)(\beta-\lambda)}{\lambda(\alpha-\beta-a+b)+a\beta-\alpha b}}^{\beta} \frac{(\mu-\lambda)\,f(X,Y)\,d\mu}{[(\lambda-a)(a-\mu)]^{1-\frac{1}{m}}\,[(\lambda-b)(\mu-b)]^{1-\frac{1}{n}}}$$

$$=\int\limits_a^b d\lambda \int\limits_{a+\frac{(\alpha-a)(a-b)(\beta-\lambda)}{\lambda(\alpha-\beta-a+b)+a\beta-\alpha b}}^{a} \frac{(\mu-\lambda)\,f(X,Y)\,d\mu}{[(\lambda-a)(a-\mu)]^{1-\frac{1}{m}}\,[(\lambda-b)(\mu-b)]^{1-\frac{1}{n}}}$$

Dass sich diese beiden Darstellungsarten auf einander zurückführen lassen, wird in der Abhandlung nachgewiesen. Für den besondern Fall

$$f(x,y) = 1 \quad , \quad \beta = \alpha$$

und wenn man für m und n ihre reciproken Werthe setzt, gelangt man zu der Gleichung:

$$\int\limits_a^\alpha d\lambda \int\limits_a^b \frac{(\mu-\lambda)\,d\mu}{[(\lambda-a)(a-\mu)]^{1-m}\,[(\lambda-b)(\mu-b)]^{1-n}}$$

$$=\frac{mn}{m+n}\,(\alpha-a)^m\,(\alpha-b)^n\,(a-b)^{m+n-1}\,\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Setzt man dagegen

$$f\left(1+\frac{x^{\frac{1}{m}}}{a}+\frac{y^{\frac{1}{n}}}{b}\right) \text{ für } f(x, y)$$

so ergibt sich

$$\iint f\left(1+\frac{x^{\frac{1}{m}}}{a}+\frac{y^{\frac{1}{n}}}{b}\right) dx\, dy$$

$$=\frac{mn}{(a-b)^{m+n-1}}\int_a^\alpha d\lambda \int_a^b \frac{(\mu-\lambda)\, f\left(\frac{\lambda\mu}{ab}\right) d\mu}{[(\lambda-a)(a-\mu)]^{1-m}\,[(\lambda-b)(\mu-b)]^{1-n}}$$

wobei für die Grenzen die Bedingung

$$1<\frac{x^{\frac{1}{m}}}{\alpha-a}+\frac{y^{\frac{1}{n}}}{\alpha-b}<1$$

besteht.

8.

Aus der letztern Gleichung werden die folgenden besonders merkwürdigen Resultate abgeleitet. Nämlich zunächst:

$$\int_0^a d\lambda \int_a^b \frac{(\lambda-\mu)\, f\left(\frac{\lambda\mu}{ab}\right) d\mu}{[(\lambda-a)(a-\mu)]^{1-m}\,[(\lambda-b)(\mu-b)]^{1-n}}$$

$$=a^m b^n (b-a)^{m+n-1}\,\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\int_0^1 z^{m+n-1} f(1-z)\, dz$$

und daraus für die specielle Annahme $f(z)=z^{r-1}$

$$\int_0^a d\lambda \int_a^b \frac{(\lambda-\mu)\,\lambda^{r-1}\mu^{r-1}\, d\mu}{[(\lambda-a)(a-\mu)]^{1-m}[(\lambda-b)(\mu-b)]^{1-n}}$$

$$=a^{m+r-1}\,.\,b^{n+r-1}(b-a)^{m+n-1}\,\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)\,\Gamma(r)}{\Gamma(m+n+r)}$$

Um an einen bereits bekannten Fall anzuknüpfen, braucht man nur die sehr speciellen Annahmen:

$$m = \frac{1}{2}\;,\; n = \frac{1}{2}\;,\; r = \frac{1}{2}$$

zu machen und zu beachten, dass $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$; $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ist; setzt man zugleich λ^2, μ^2 für λ, μ und ebenso a^2, b^2 für a, b, so folgt:

$$\int_0^a d\lambda \int_a^b \frac{(\mu^2-\lambda^2)\, d\mu}{\sqrt{(\lambda^2-a^2)(a^2-\mu^2)(\lambda^2-b^2)(\mu^2-b^2)}} = \frac{\pi}{2}$$

eine Gleichung welche, wie bekannt, zuerst Lamé gefunden hat und mit deren Herleitung sich Poisson, Chasles, Terquem u. A. beschäftigten.

Setzt man $f(z) = log\,(1-z)$, so folgt:

$$\int_0^a d\lambda \int_a^b \frac{(\mu-\lambda)\, log\left(1 - \frac{\lambda\mu}{ab}\right) d\mu}{[(\lambda-a)(a-\mu)]^{1-m}\,[(\lambda-b)(\mu-b)]^{1-n}}$$

$$= \frac{a^m b^n (b-a)^{m+n-1}}{(m+n)^2} \cdot \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

woraus für $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$ folgt:

$$\int_0^a d\lambda \int_a^b \frac{(\mu-\lambda)\, log\left(1-\frac{\lambda\mu}{ab}\right) . \, d\mu}{\sqrt{(\lambda-a)(\lambda-b)(a-\mu)(\mu-b)}} = \pi\sqrt{a\,b}.$$

Man sieht dass fast jede für $f(z)$ angenommene Form zu einem neuen Resultate führt. Rücksichtlich der weiteren Ausführung dieses Gegenstandes muss jedoch auf die Abhandlung selbst verwiesen werden.

9.

Den Schluss der Arbeit bildet eine allgemeine Transformationsformel für bestimmte einfache Integrale, welche ausgedehnter Anwendungen fähig zu sein scheint.

Sie ergibt sich aus dem Theorem der bestimmten Doppelintegrale, wenn man darin die Grenzen constant sein lässt und $\frac{f(x,y)}{\Delta}$ für $f(x, y)$ setzt.

In dem besondern Falle aber, welcher hier hauptsächlich in das Auge zu fassen ist, dass $f(x, y) = 1$ angenommen wird, lässt sich sowohl das ursprüngliche als das durch die neuen Veränderlichen λ, μ transformirte Doppelintegral durch Quadraturen ausdrücken, so dass man zu einer Relation zwischen einfachen Integralen von ganz allgemeinem Charakter gelangt.

Aus diesen und den vorhin etwas näher bezeichneten Anwendungen lässt sich die Fruchtbarkeit der zur Lösung gebrachten Aufgabe erkennen. Aber ganz abgesehen hiervon scheint es wichtig, dass nunmehr eine umfassende Lösung der so vielfach aber nie mit durchgreifendem Erfolge zur Sprache gebrachten Aufgabe vorliegt und dadurch eine Methode bezeichnet ist, durch welche sich, wie zu erwarten ist, die noch allgemeineren Fragen in diesem Gebiete der Integralrechnung beantworten lassen.